UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 191-200
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Juegos, estrategias e intuición

Problema

Los jugadores J1 y J2 disponen de k y m estrategias respectivamente y deben elegir una de ellas, sin conocer la elección del otro. La combinación de las estrategias que elija cada jugador determina la ganancia que recibirá y cada uno de los jugadores conoce lo que recibiría por cada una de las combinaciones posibles. Si cada jugador busca obtener la mayor ganancia posible, de una manera racional,¿cuál sería la estrategia que juegue cada uno?

Esta es una manera un tanto general de proponer un problema de la teoría de juegos y su solución requiere una formalización adecuada. John Nash es el gran matemático que trató este tipo de problemas, de manera aún más general, considerando más de dos jugadores[1]. En el presente artículo, presento experiencias didácticas y comentarios, empleando juegos sencillos, como una manera de iniciar a alumnos de diversos niveles educativos en este fascinante tema.

Un ejemplo muy conocido de este tipo de problemas es el llamado "*dilema de los prisioneros*", en el cual los jugadores tienen dos estrategias cada uno:

> *Dos sospechosos son detenidos y acusados de un delito. No hay evidencias suficientes para condenarlos, por lo cual la decisión de condenarlos a cierto tiempo de prisión o de liberarlos, se tomará con base en lo que declaren los sospechosos. Los sospechosos son encerrados sin posibilidades de comunicarse entre sí y se les comunica que tienen la posibilidad de confesar o no confesar. Si ninguno confiesa, ambos serán condenados por un delito menor y sentenciados a 1 año de cárcel; si ambos confiesan, serán sentenciados a 6 años de cárcel, cada uno, por el delito cometido; y si uno confiesa y el otro no, al que confiesa se le dará la libertad y al que no confiesa se le condenará a 9 años de prisión. Si ambos sospechosos toman su decisión racionalmente, ¿cuál de sus opciones elegirán? ¿Confesar? O ¿No confesar?*

Por las múltiples aplicaciones de estos problemas en las ciencias sociales, por su importancia en sí misma como tema matemático y por sus grandes potencialidades didácticas para contribuir al desarrollo del pensamiento matemático,

[1] Nash, J. (1950) Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of Sciences 36: 48-49

de la capacidad de aprender a aprender y de la intuición optimizadora, considero que se deben hacer esfuerzos para usarlos desde el nivel secundario. Una manera de hacerlo es proponiendo situaciones lúdicas que sean asumidas trabajando en grupos.

A continuación narro cómo he desarrollado algunas experiencias didácticas con alumnos universitarios de segundo o tercer año de carreras de economía, ciencias e ingeniería, que podrían servir de base para experiencias más sencillas con alumnos de secundaria.

Jugando en el aula

Divido al conjunto de alumnos de la clase en dos grupos (grupo Alfa y grupo Beta) y en cada uno pido dos alumnos voluntarios para que sean los jugadores (J1 y J2) de juegos cuyas reglas voy a anunciar. Cada uno de los jugadores forma un equipo de "asesores" para que lo ayuden a tomar la decisión que más le convendría. Ni los jugadores ni los equipos pueden comunicarse y la decisión debe ser muy racional.

Juego 1

Para el juego, entrego dos tarjetas, T1 y T2, a cada jugador, cada una de la cuales tiene escrito un pedido que yo cumpliré.

***T1**: Dale 3 soles[2] al otro jugador.*

***T2**: Dame 1 sol.*

Después de deliberar con su equipo asesor durante un tiempo prudencial, los jugadores de cada grupo me entregan su tarjeta y luego de leer ambos pedidos, yo cumplo con hacer lo que cada uno me solicita.[3]

El juego consiste en que cada grupo obtenga la mayor ganancia posible.

Comprensión del problema:

Es una fase fundamental y generalmente, discutiendo en cada grupo, se llega a organizar la información de alguna de las siguientes formas:

- *Listas de pagos*

Pagos que recibiría J1:

Elección de J1	Elección de J2	Pago a J1
T1	T1	3
T1	T2	0
T2	T1	4
T2	T2	1

Pagos que recibiría J2:

Elección de J1	Elección de J2	Pago a J2
T1	T1	3
T1	T2	4
T2	T1	0
T2	T2	1

[2] El "Nuevo sol" es la unidad monetaria en el Perú. Coloquialmente, usamos "sol"

[3] El juego es una variante de la versión de Auman del juego "el dilema de los prisioneros".

- *Cuadros matriciales*

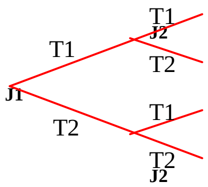
Pagos a J1:

		J2	
		T1	T2
J1	T1	3	0
	T2	4	1

Pagos a J2:

		J2	
		T1	T2
J1	T1	3	4
	T2	0	1

- *Árboles*



Pagos a **J1**	Pagos a **J2**
3	3
0	4
4	0
1	1

Es un gran estímulo a la capacidad de aprender a aprender de los estudiantes, constatar luego, que sin saberlo han estado usando conceptos y representaciones propias de la teoría de juegos; así, la forma de organizar la información mediante "listas de pagos" nos está dando las *funciones de pagos* del juego propuesto, y las dos últimas formas de organizar la información es prácticamente la misma que se usa al representar los juegos en *forma normal* y en *forma extensiva*, respectivamente. Resulta sencillo pasar de los dos cuadros matriciales a un cuadro bimatricial que resume ambos y que es el que se usa para el análisis de juegos en forma normal.

		J2	
		T1	T2
J1	T1	(3, 3)	(0, 4)
	T2	(4, 0)	(1, 1)

Generalmente, en ambos grupos los dos jugadores entregan las tarjetas T2. Cuando se les pide exponer cómo llegaron a esa elección, lo hacen usando la forma en que sistematizaron la información para comprender mejor el problema y usando criterios que corresponden a una aproximación intuitiva de "*estrategias estrictamente dominadas*"; es decir, que si J1 entrega T1 obtendrá un menor pago que si entrega T2, cualquiera que sea la tarjeta que entregue J2 (3 es menor que 4 y 0 es menor que 1). En consecuencia, J1 descarta entregar T1. En este caso, lo mismo ocurre para J2 y en consecuencia, aunque más les convendría a ambos jugadores entregar las tarjetas T1, porque así cada uno ganaría 3 soles, la racionalidad los lleva a optar a ambos por entregar las tarjetas T2.

Regresando al caso del dilema de los prisioneros, resumimos la situación planteada usando números negativos para los años de prisión y la notación bimatricial introducida:

		P2 No confesar	P2 Confesar
P1	No confesar	(-1, -1)	(-9, 0)
	Confesar	(0, -9)	(-6, -6)

Se ve claramente que, de manera análoga al juego anterior, aunque a ambos prisioneros les conviene más optar por no confesar, la racionalidad los llevaría a ambos a confesar. La racionalidad se basa en que la "ganancia" de cada prisionero por no confesar siempre es menor que la "ganancia" por confesar (-1 es menor que 0 y -9 es menor que -6), lo cual, en lenguaje de teoría de juegos se expresa diciendo que "la estrategia *no confesar* está estrictamente dominada por la estrategia *confesar*".

Después de haber analizado estos juegos, es interesante pedir a los estudiantes que piensen en casos reales en los que se tiene una situación similar. En una ocasión, un grupo observó que la misma situación se daba en la carrera armamentista entre dos países: a ambos, lo que más les conviene es gastar poco en armas, pero ante la desconfianza, la racionalidad los lleva a gastar mucho en armas.

Continuamos, proponiendo dos nuevos juegos, para examinarlos en grupos de a lo más 4 estudiantes.

Juego 2

Jugador 1: Dispone de dos fichas para jugar: la blanca y la negra.
Jugador 2: Dispone de tres fichas para jugar: roja, amarilla y verde.

Cada jugador colocará en una caja una de las fichas que dispone, una sola vez, y de la combinación de fichas que resulte, cada jugador obtendrá una determinada "ganancia"

Si el jugador 1 coloca su ficha blanca, ganará 4, 3 ó 4 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 3, 4 ó 5 soles respectivamente.

Si el jugador 1 coloca su ficha negra, ganará 0, 5 ó 3 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 6, 0 ó 4 soles respectivamente.

Los jugadores conocen las reglas, pero ninguno sabe lo que jugará el otro.

Actividades grupales

a) Organizar y resumir la información dada para el juego, de modo que se vean claramente las diversas posibilidades y sus respectivas ganancias para los jugadores.

b) Si los jugadores toman su decisión racionalmente ¿qué ficha elegiría cada uno? Justificar usando la información organizada.

Los grupos resumen la información fácilmente, usando una bimatriz como las que hemos visto:

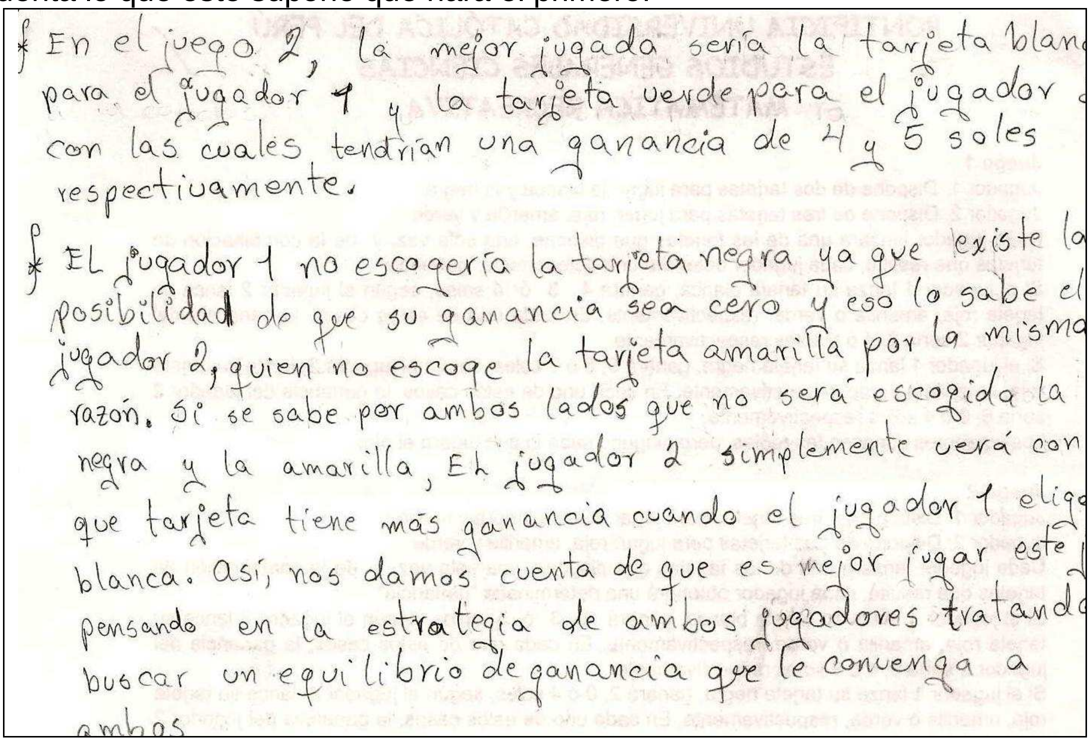
		J2		
		Roja	Amarilla	Verde
J1	Blanca	(4, 3)	(3, 4)	(4, 5)
	Negra	(0, 6)	(5, 0)	(3, 4)

Todos los grupos coinciden en que J1 colocará la ficha blanca y J2 colocará la ficha verde. Se puede percibir que para J1 ninguna estrategia está estrictamente domina por otra, pero para J2, la estrategia "Amarilla" está estrictamente dominada por la "Verde" (los pagos 4 ó 0 que recibiría J2 por "Amarilla" siempre son menores que los pagos 5 ó 4 que recibiría por "Verde"). Descartando la estrategia "Amarilla", el juego se reduce a un caso de bimatriz de 2x2 como los anteriores

		J2	
		Roja	Verde
J1	Blanca	(4, 3)	(4, 5)
	Negra	(0, 6)	(3, 4)

Se ve ahora que "Negra" está estrictamente dominada por "Blanca" (0 es menor que 4 y 3 es menor que 4). Entonces J1 descartará la estrategia "Negra" y el juego se reduce a una bimatriz de una sola fila (de "Blanca") por dos columnas (de "Roja" y "Verde") y en tal situación J2 descarta "Roja", por estar estrictamente dominada por "Verde", pues 3 es menor que 5. Así, la conclusión racional es la combinación "Blanca" y "Verde".

En las justificaciones, los alumnos suelen distraer su análisis usando el argumento de evitar obtener un pago de 0 soles, como se muestra en la siguiente solución. Cabe destacar que en sus análisis consideran que un jugador actuará "buscando un equilibrio", imaginando lo que el otro hará, lo cual a su vez tendrá en cuenta lo que éste supone que hará el primero:


* En el juego 2, la mejor jugada sería la tarjeta blanc
para el jugador 1 y la tarjeta verde para el jugador
con las cuales tendrían una ganancia de 4 y 5 soles
respectivamente.

* EL jugador 1 no escogería la tarjeta negra ya que existe la
posibilidad de que su ganancia sea cero y eso lo sabe el
jugador 2, quien no escoge la tarjeta amarilla por la misma
razón. Si se sabe por ambos lados que no será escogida la
negra y la amarilla, EL jugador 2 simplemente verá con
que tarjeta tiene más ganancia cuando el jugador 1 elig
blanca. Así, nos damos cuenta de que es mejor jugar este
pensando en la estrategia de ambos jugadores tratand
buscar un equilibrio de ganancia que le convenga a
ambos

Teniendo presente esta observación, resulta particularmente interesante el siguiente juego:

Juego 3

Jugador 1: Dispone de tres fichas para jugar: blanca, negra y marrón.
Jugador 2: Dispone de tres fichas para jugar: roja, amarilla y verde.

Cada jugador colocará en una caja una de las fichas que dispone, una sola vez, y de la combinación de fichas que resulte, cada jugador obtendrá una determinada "ganancia"

Si el jugador 1 coloca su ficha blanca, ganará 1, 3 ó 3 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 9, 4 u 8 soles respectivamente.

Si el jugador 1 coloca su ficha negra, ganará 2, 0 ó 4 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 4, 4 ó 6 soles respectivamente.

Si el jugador 1 coloca su ficha marrón, ganará 3, 2 ó 3 soles, según el jugador 2 coloque su ficha roja, amarilla o verde, respectivamente. En cada uno de estos casos, la ganancia del jugador 2 sería 5, 6 ó 4 soles respectivamente.

Los jugadores conocen las reglas, pero ninguno sabe lo que jugará el otro.

Actividades grupales

a) Organizar y resumir la información dada para el juego, de modo que se vean claramente las diversas posibilidades y sus respectivas ganancias para los jugadores.

b) Si los jugadores toman su decisión racionalmente ¿qué ficha elegiría cada uno? Justificar usando la información organizada.

c) Presentar la información organizada y resumida de algún juego conocido o inventado por el grupo y explicar si existe o no una "decisión racional" de cada jugador.

La parte (a) es fácilmente obtenida, usando la representación bimatricial:

		J2		
		Roja	Amarilla	Verde
J1	Blanca	(1, 9)	(3, 4)	(3, 8)
	Negra	(2, 4)	(0, 4)	(4, 6)
	Marrón	(3, 5)	(2, 6)	(3, 4)

En este juego se tiene una dificultad especial: no existen estrategias estrictamente dominadas para ninguno de los jugadores. El pago cero a J1 en la combinación de estrategias "Negra" para J1 y "Amarilla" para J2, hace que los estudiantes inicialmente no consideren la estrategia "Negra" como una buena opción para J1. Sin embargo, generalmente llegan a la solución que corresponde a un equilibrio de Nash, en la cual la mejor elección para J1 es "Negra" y la mejor elección para J2 es "Verde". Las dificultades para explicar cómo llegan a tal solución y la ausencia de formalizaciones o algoritmos, nos hacen calificar de *intuitiva* a tal solución. Que el profesor y toda la clase acepten como correcta la solución, les da seguridad y entonces la tarea es encontrar una manera racional de llegar a tal solución. Esta es una parte fundamental en el aprendizaje de la teoría de juegos, pues es la búsqueda de un manejo más cuidadoso de la racionalidad de los jugadores, que en verdad es el inicio del manejo de la racionalidad propia de esta teoría, pero sin conocer aún definiciones formales ni técnicas, que cuando son dadas desde el inicio llevan a un aprendizaje puramente deductivo y a veces de aplicación mecánica de técnicas y recortan esta fase tan importante de *aproximación intuitiva y creativa*.

Toma un poco de tiempo, pero generalmente luego de discusiones en cada grupo y entre los grupos, se llega a la técnica de examinar lo que elegiría un jugador si supiera la elección que va a hacer el otro jugador y marcar los pagos correspondientes, y entonces la solución queda determinada por las estrategias que corresponden a una casilla en la que están marcadas las dos componentes del par de pagos.

Después de esta experiencia, queda muy claro para los estudiantes que la ausencia de estrategias estrictamente dominadas no implica la ausencia de una solución y resulta muy interesante pedirles que ensayen una definición de ese concepto de "solución racional", que en verdad es el concepto de *equilibrio de Nash*. Los estudiantes perciben claramente la necesidad de formalizar y se les pide que lo hagan. En este sentido, tuve una excelente experiencia al recibir la siguiente explicación, como intento de llegar a una "definición de equilibrio de Nash" para juegos similares a los dados:

Se hacen dos listas:

Si J2 eligiera:	**entonces J1 elegiría:**
Roja	Marrón
Amarilla	Blanca
Verde	Negra

Si J1 eligiera:	**entonces J2 elegiría:**
Blanca	Roja
Negra	Verde
Marrón	Amarilla

Como **Verde – Negra** está en la primera lista y **Negra – Verde** está en la segunda, este par de estrategias es la solución racional del juego. En verdad las listas son las "correspondencias de mejor respuesta" de cada jugador y, esencialmente, se está dando la definición de equilibrio de Nash, con estrategias puras, que suele darse, usando tales correspondencias, para juegos finitos de dos jugadores[4].

Inventando juegos

Una actividad que se pide muy poco – o nunca – a los estudiantes, es inventar problemas. Considero que siempre debería hacerse paralelamente a la actividad de resolver problemas, pues estimula la creatividad, ayuda a precisar las ideas y conceptos que se fueron introduciendo y generalmente se presentan nuevas

[4] R_1 y R_2 son correspondencias que definen los conjuntos de mejores respuestas de los jugadores para cada estrategia del otro jugador. Así, (s, t) es un equilibrio de Nash si y sólo si $s \in R_1(t)$ y $t \in R_2(s)$.

dificultades que requieren introducir nuevos conceptos o técnicas para resolverlas. Resulta muy atractivo y motivador para los alumnos tratar de resolver dificultades que ellos mismos han creado; más aún si lo han hecho conscientes de los criterios que deberán usar para resolverlas, pero que les resultan insuficientes. Al pedirles que inventen juegos similares a los vistos, en los que se examine las elecciones que harían jugadores racionales, los alumnos llegan a plantear, sin proponérselo, juegos en los que hay más de un equilibrio de Nash, juegos en los que la mejor respuesta de un jugador a cierta estrategia del otro jugador no es una única estrategia (lo cual será retomado para explicar el término "correspondencia" en lugar del término "función"); y – lo más interesante – juegos en los que no existe un equilibrio de Nash, según el criterio dado.

Luego de discutir algunos problemas seleccionados, se presentan de manera formal las definiciones de juego, funciones de pago, estrategias estrictamente dominadas, correspondencias de mejor respuesta y equilibrio de Nash para juegos de dos jugadores. Se hace notar la equivalencia al definir el equilibrio de Nash en términos de correspondencias de mejor respuesta (o de reacción) y en términos de funciones de pago. Se hace ver, observando una bimatriz de pagos con un equilibrio de Nash, que siendo (s*, t*) un equlibrio de Nash, si el jugador 1 cambia de estrategia y el jugador 2 no cambia, entonces el pago que recibe el jugador 1 en ningún caso es mejor que el que le corresponde con (s*, t*) y que también ocurre lo mismo si el jugador 2 es el que cambia de estrategia sin que cambie el jugador 1. Se enuncia también el teorema de Nash, según el cual todo juego finito (tanto el conjunto de jugadores como el de estrategias de cada uno de ellos son conjuntos finitos) tiene un equilibrio de Nash.

A continuación algunos juegos seleccionados de entre los inventados por los alumnos:

Juego (a)

	R	S	T
A	(3, 6)	(7, 1)	(2, 6)
B	(4, 1)	(7, 5)	(5, 8)

Juego (b)

	R	S
A	(2, 4)	(3, 9)
B	(5, 3)	(2, 1)

Juego (c)

	S	T	U	V
A	(2, 4)	(3, 9)	(7, 1)	(7, 0)
B	(5, 3)	(2, 1)	(6, 4)	(4, 1)
C	(0, 5)	(4, 3)	(3, 3)	(9, 2)

Juego (d)

	S	T
A	(2, -2)	(-6, 6)
B	(-3, 3)	(4, -4)

En todos los juegos se usa la técnica de subrayar los pagos de cada jugador, que correspondan a la o las mejores respuestas, considerando que el otro jugador elegirá una estrategia determinada. Así, en el juego (a), si J1 eligiera la estrategia A, entonces J2 elegiría R ó T, por lo cual se subrayan los correspondientes números 6 de la fila A. Si J1 eligiera B, entonces J2 elegiría T y se subraya el correspondiente número 8 de la fila B. Análogamente, si J2 eligiera R, entonces J1 elegiría B y se subraya el correspondiente 4 de la columna R. Completando el procedimiento, se obtiene:

	R	S	T
A	$(3, \underline{6})$	$(\underline{7}, 1)$	$(2, \underline{6})$
B	$(\underline{4}, 1)$	$(\underline{7}, 5)$	$(\underline{5}, \underline{8})$

La combinación de equilibrio se da con las estrategias B y T, pues su casilla tiene a ambos números subrayados.

En este juego es fácil ver que al jugador 1 le sería indiferente elegir su estrategia A o su estrategia B si supiera que el jugador 2 elegirá su estrategia S. Análogamente, para el jugador 2, respecto a sus estrategias R y T, si supiera que el jugador 1 elegirá su estrategia A. Usando las correspondencias de mejor respuesta tenemos:

$$R_1(R) = \{B\} \; ; \; R_1(S) = \{A, B\} \; ; \; R_1(T) = \{B\}$$

$$R_2(A) = \{R, T\} \; ; \; R_2(B) = \{T\}$$

Se verifica que el par de estrategias (B, T) es un equilibrio de Nash observando que $B \in R_1(T)$ y que $T \in R_2(B)$. A esto mismo se llegó con la técnica del subrayado y también se puede llegar eliminando estrategias estrictamente dominadas: primero la S, luego la A y finalmente la R.

En el juego (b) se obtienen dos equilibrios de Nash, lo cual suscita discusiones sobre cuál de ellos se escogería y motiva hacer comentarios sobre intercambiabilidad y equivalencia de equilibrios y sobre equilibrios subjuego-perfectos. Más aún, cuando se introdujo el concepto de estrategias mixtas, fue muy interesante que los alumnos descubrieran que este juego propuesto por ellos tiene un tercer equilibrio de Nash.

En el juego (c), obtenido añadiendo estrategias a ambos jugadores del juego (b), no se obtuvieron equilibrios de Nash, lo cual despertó inquietud entre los alumnos, pues resultó natural pensar que se había encontrado un contraejemplo al teorema de Nash de existencia de equilibrio en todo juego finito, enunciado anteriormente. Se sugirió entonces buscar juegos más sencillos que tengan esta particularidad. Así apareció el juego (d), que además tiene otra particularidad muy interesante: es un juego de suma nula; es decir, un juego en el cual lo que gana un jugador es lo que pierde el otro.

En el juego (d), ante la ausencia de estrategias estrictamente dominadas y al no encontrar un criterio claro para que los jugadores elijan una de sus estrategias, sugerí pensar que en verdad los jugadores tienen más de dos formas de elegir sus estrategias, considerando el azar. En la mayoría de veces, en esta situación los alumnos encontraron como una tercera manera de elegir una estrategia el lanzar una moneda al aire y según salga cara o sello, optar por una u otra estrategia. Llegado a este punto, la pregunta natural es ¿por qué no usar un dado en lugar de una moneda? ; o ¿por qué no una ruleta? Este es el inicio del estudio de estrategias mixtas, usando probabilidades. Los detalles los dejamos para otro artículo y recomendamos a los lectores interesados indagar en la abundante bibliografía sobre teoría de juegos; en particular, en el libro de Gibbons (1993)[5], o en el de Binmore (1993)[6].

Comentarios

1. Las ideas aquí expuestas, como parte de mis experiencias didácticas desarrolladas con jóvenes universitarios, pueden servir de base para desarrollarlas con jóvenes de secundaria y tener nuevas fuentes de información sobre el uso de la intuición en la resolución de problemas de optimización y sobre la factibilidad de introducir este tema en los currícula de la educación básica. La teoría de situaciones didácticas, el enfoque ontosemiótico y la ingeniería didáctica, son enfoques teóricos de la educación matemática que podrían utilizarse en las investigaciones al respecto.

2. La teoría de juegos presenta tan interesantes oportunidades de ejercitar el pensamiento matemático – en particular el pensamiento optimizador en situaciones de conflicto – y tiene tantas aplicaciones en economía, sociología, psicología, negocios, política, derecho, biología, etc., que una introducción elemental a ella, tratando problemas como los aquí propuestos, debería formar parte de los cursos básicos de matemáticas para todos los estudiantes universitarios. En Internet hay abundante información sobre sus múltiples aplicaciones y referencias a diversas situaciones. Un video interesante de divulgación, relacionado con una perspectiva dinámica del dilema de los prisioneros, se puede encontrar en:
   http://www.youtube.com/watch?v=g5MeC3GDx74&feature=related

[5] Gibbons, R. (1993). *Un primer curso de teoría de juegos*. Barcelona: Antoni Bosch
[6] Binmore, K. (1993). *Teoría de juegos*. Madrid: McGraw-Hill